

Orlicz 序列空间光滑点的一点注记

王 静, 崔云安

(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘 要: 给出在 $\varphi(u)/u \rightarrow A(u \rightarrow \infty)$ 情况下由一般的 Orlicz 函数生成的 Orlicz 序列空间光滑点的判别准则以及光滑点与很光滑点、强光滑点的等价条件, 并在此基础上推出了该空间具有光滑性的充分必要条件, 至此 Orlicz 序列空间光滑点判据得以解决。

关键词: Orlicz 序列空间; 光滑点; 强(很) 光滑点

DOI: 10. 15938/j. jhust. 2021. 03. 022

中图分类号: O177. 3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2021) 03-0147-06

A Note on Smooth Points in Orlicz Sequence Spaces

WANG Jing, CUI Yun-an

(School of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: In this paper, when $\varphi(u)/u \rightarrow A(u \rightarrow \infty)$ the criterion of smooth points in Orlicz sequence space generated by general Orlicz functions and the equivalence conditions of smooth points with very smooth points and strong smooth points are given. On this basis, the sufficient and necessary conditions for smooth points in Orlicz sequence space are derived, so that the criterion of smooth points in Orlicz space can be solved.

Keywords: Orlicz space; smooth points; strong (very) smooth points

0 引 言

众所周知, 由 N 函数生成的 Orlicz 序列空间光滑点很早就被讨论了, 而且获得了充分必要条件, 但对 $\varphi(u)$ 做了比较苛刻的限制, 即 $\varphi(u)/u \rightarrow A(u \rightarrow \infty)$ 。本文将讨论在 $\varphi(u)/u \rightarrow A(u \rightarrow \infty)$ 情况下由一般的 Orlicz 函数生成的 Orlicz 序列空间光滑点的判据。

首先给出了在 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{u} = A < \infty$ 情况下光滑点判别准则以及光滑点与强光滑点和很光滑点的等价

条件, 并在此基础上推出该空间光滑的充要条件, 至此 Orlicz 序列空间光滑点判据得以解决。

1 预备知识

称映射 $\varphi: R \rightarrow (0, +\infty)$ 为 Orlicz 函数是指

- I φ 是偶的连续的凸函数且 $\varphi(0) = 0$;
- II 当 $u \neq 0$ 时 $\varphi(u) > 0$ 。

称函数 $\Psi(v) = \sup\{ |u|v - \varphi(v) : v \geq 0 \}$ 为 $\varphi(u)$ 的余函数, 函数 $\Psi(v)$ 也是一个 Orlicz 函数。

用 l_0 表示所有实数序列构成集合, 对任意 $x = \{x(i)\}_{i=1}^{\infty} \in l_0$, 称

收稿日期: 2019-05-24

基金项目: 国家自然科学基金(11871181)。

作者简介: 崔云安(1961—), 男, 博士, 教授, 博士研究生导师。

通信作者: 王 静(1995—), 女, 硕士研究生, E-mail: 1071801137@qq.com.

$$I_{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x(i))$$

是 x 关于 Orlicz 函数 φ 的模。线性集

$$l_{\varphi} = \left\{ x = \{x(i)\}_{i=1}^{\infty} : \exists a > 0, \text{使 } I_{\varphi}\left(\frac{x}{a}\right) < +\infty \right\}$$

分别赋 Luxemburg 范数

$$\|x\| = \inf \left\{ k > 0 : I_{\varphi}\left(\frac{x}{k}\right) \leq 1 \right\}$$

和赋 Orlicz 范数

$$\|x\|_{\varphi}^{\circ} = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)y(i)| : I_{\varphi}(y) \leq 1 \right\}$$

构成 Orlicz 序列空间, 记为 $l_{\varphi} = (l_{\varphi}, \|\cdot\|)$, $l_{\varphi}^{\circ} = (l_{\varphi}, \|\cdot\|^{\circ})$ 。

其子空间

$$h_{\varphi} = \left\{ x = (x(i))_{i=1}^{\infty} : \forall c > 0, I_{\varphi}\left(\frac{x}{c}\right) < \infty \right\}$$

关于上面的两种范数也构成 Orlicz 序列空间, 记为

$$h_{\varphi} = (h_{\varphi}, \|\cdot\|), l_{\varphi}^{\circ} = (h_{\varphi}, \|\cdot\|^{\circ})。$$

已证得 $\|x\|^{\circ} = \inf \frac{1}{k} (1 + I_{\varphi}(kx))$, 当且仅当 k

$\in k(x) = [k^*, k^{**}]$ 时范数可达, 其中

$$k^* = \inf \{ k > 0, I_{\varphi}(p(k|x|)) \geq 1 \}$$

$$k^{**} = \sup \{ k > 0, I_{\varphi}(p(k|x|)) \leq 1 \}$$

有关 Orlicz 序列空间的更多知识参见文 [1-4]。

当 $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u)/u = A < \infty$ 时, $p(u) \rightarrow A$, 当 $u \rightarrow \infty$ 此
时可能有 $k(x) = \emptyset$ 即 $k_x^* = +\infty$ 。若 $k(x) = \emptyset$, 则有

$$\|x\|^{\circ} = \inf \frac{1}{k} (1 + I_{\varphi}(kx)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (1 + I_{\varphi}(kx))$$

定义 1^[3] 设 X 是 Banach 空间, $x \in X$, 若 $f \in X^*$ 满足 $\|f\| = 1, \langle f, x \rangle = \|x\|$, 则称 f 为 x 的支撑泛函, 若 x 的支撑泛函唯一, 称 x 是光滑点。即

$$\text{Grad}(x) = \{f \in X^* : \|f\| = 1, \langle f, x \rangle = \|x\| = 1\}$$

含有唯一元。

定义 2^[3] 强(很)光滑点是指 x 光滑点且 $\forall f_n \subset S(X^*), f_n(x) \rightarrow 1$ 蕴含

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0 (f_n - f \xrightarrow{w} 0)$$

其中 f 为 x 的唯一支撑泛函。

定义 3^[3] 称 Orlicz 函数 φ 满足 δ_2 条件(记为 $\varphi \in \delta_2$) 是指存在常数 $K > 0$ 及 $u_0 > 0$ 使得对任意的 $u \in R, |u| \leq u_0$ 有

$$\varphi(2u) \leq K\varphi(u)$$

2 主要结果及证明

本文所用引理如下:

引理 1^[4] $l_{\varphi} = h_{\varphi} (l_{\varphi}^{\circ} = h_{\varphi}^{\circ}) \Leftrightarrow \varphi \in \delta_2$

引理 2^[4] $(h_{\varphi})^* = l_{\psi}^{\circ}; (h_{\varphi}^{\circ})^* = l_{\psi}; F$ 为奇异泛函且

$$(l_{\varphi})^* = l_{\psi}^{\circ} + F; (l_{\varphi}^{\circ})^* = l_{\psi} + F$$

引理 3^[4] 设 $\varphi \in \delta_2, u \in l_{\varphi}$ 有

i. $\|u\| = 1 \Rightarrow I_{\varphi}(u) = 1$;

ii. 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得

$$\|u\| \geq \varepsilon \Rightarrow I_{\varphi}(u) \geq \delta。$$

引理 4^[4]

$$\|\varphi\| = \sup \{ \varphi(x) : I_{\varphi}(x) < \infty \} = \sup \{ \varphi(x) : I_{\varphi}(x) < \varepsilon \}$$

引理 5^[4] 对任意 $f \in (l_{\varphi})^*$ 可唯一分解为 $f = v + \phi$ 其中 $v \in l_{\psi}^{\circ}, \varphi \in F$, 且

$$\|f\|^{\circ} = \|v\|^{\circ} + \|\phi\|^{\circ}$$

对任意 $f \in (l_{\varphi}^{\circ})^*$ 可唯一分解为 $f = v + \phi$ 其中 $v \in l_{\psi}, \phi \in F$ 。

引理 6^[4] 记

$$\xi_{\varphi}(u) = \inf \left\{ \lambda > 0 : I_{\varphi}\left(\frac{x}{\lambda}\right) < \infty \right\}$$

则 $\forall x \in l_{\varphi}$ 有

$$\xi_{\varphi}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - [x]_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - [x]_n\|^{\circ} = \inf \{ \|x - y\| : y \in h_{\varphi} \} = \inf \{ \|x - y\|^{\circ} : y \in h_{\varphi}^{\circ} \}$$

其中 $[x]_n = (x(1), x(2), \dots, x(n), 0, \dots)$ 。

引理 7^[4] 若 φ 与 ψ 是互余的 N 函数, 则 l_{φ}° 是光滑的充要条件 $\varphi \in \delta_2$ 且 $q(v)$ 在 $[0, \psi^{-1}(\frac{1}{2})]$ 上严格单调递增。

引理 8 若 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{u} = A < \infty$, 令 $N(x) = \{i \in N : x(i) \neq 0\}$, 且 $\text{card} N(x)$ 表示集合 $N(x)$ 所含元素个数。若 $k(x) = \emptyset$ 则

$$\text{card} N(x) \leq \frac{1}{\psi(A)} \text{ 且 } \|x\| = A \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|。$$

证明: 当 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{u} = A < \infty$ 时, $p(u) \rightarrow A$

当 $u \rightarrow \infty$ 由于 $k(x) = \emptyset$ 即 $k_x^* = +\infty$, 则有

$$\forall k > 0, I_{\psi}(p(kx)) < 1$$

从而当 $k \rightarrow +\infty$, 有

$$\sum_{i \in N(x)} \psi(A) \leq 1 \Rightarrow$$

$$\psi(A) \operatorname{card} N(x) \leq 1 \Rightarrow$$

$$\operatorname{card} N(x) \leq \frac{1}{\psi(A)}$$

此时

$$\begin{aligned} \|x\|^\circ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (1 + I_\varphi(kx)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} I_\varphi(kx) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I_\varphi(kx) + I_\psi(p(kx))}{k} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I_\varphi(kx) + I_\psi(A)}{k} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k|x(i)| \wedge A}{k} = \\ &= A \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)| \end{aligned}$$

综上所述

$$\operatorname{card} N(x) \leq \frac{1}{\psi(A)} \text{ 且 } \|x\|^\circ = A \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|.$$

更多关于 Orlicz 空间的几何性质的研究结果请参见文 [8-20]。

本文主要结果如下:

定理 1 若 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{u} = A < \infty, x \in l_\varphi^\circ$ 且 $k(x) = \emptyset$ 。则 $v = \operatorname{Asign} x$ 为 x 的支撑泛函且若 f 在 x 点范数可达, 则 $f = y, y(i) = A, i \in N(x)$ 。

证明: 因为

$$\begin{aligned} \langle v, x \rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Asign} x(i) x(i) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} A |x(i)| = A \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)| = \\ &= \|x\|^\circ \end{aligned}$$

且 $I_\psi(v) \leq 1$ 从而 $\|v\| \leq 1$, 又

$$\begin{aligned} \psi(v) &= \sup\{u|v| - \varphi(u) : u > 0\} = \\ &= \sup\left\{|v| - \frac{\varphi(u)}{u} : u > 0\right\} \end{aligned}$$

为此

$$\psi(v) = \begin{cases} 0, & |v| \leq A \\ +\infty, & |v| > A \end{cases}$$

任取 $\lambda < 1$

$$I_\psi\left(\frac{v}{\lambda}\right) = \psi\left(\frac{v}{\lambda}\right) \operatorname{card} N(x) = +\infty$$

从而 $\|v\| \geq 1$, 为此 $\|v\| = 1$, 所以 $v = \operatorname{Asign} x$ 为 x 的支撑泛函。

由于 v, x 保持同号, 无碍于一般性, 常设 $x(i) \geq 0, i = 1, 2, \dots$

对于任意 $f = y + \phi \in \operatorname{Grad}(x)$, 由于

$$\begin{aligned} 1 = f(x) &= \sum_{i \in N(x)} y(i) x(i) + \phi(x) = \\ &= \sum_{i \in N(x)} y(i) x(i) = \sum_{i \in N(x)} A x(i) \end{aligned}$$

从而

$$\sum_{i \in N(x)} (A - y(i)) x(i) = 0$$

记 $y_0 = \max_{i \in N(x)} y(i)$, 若 $y_0 > A$, 则 $\psi(v) = +\infty$, 此时 $\|f\| > 1$ 与 $f \in \operatorname{Grad}(x)$ 矛盾, 从而 $y_0 \leq A$, 又

$$\sum_{i \in N(x)} (A - y(i)) x(i) = 0$$

所以当 $i \in N(x)$ 有 $y(i) = A$ 。

由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - (x(1), x(2), \dots, x(n), 0, \dots)\|^\circ &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} A \sum_{i > n} x(i) = 0 \end{aligned}$$

从而 $x \in h_\varphi^\circ$, 所以 $\phi = 0$, 即 $f = y$ 。

定理 2 若 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{u} = A < \infty, f \in (l_\varphi^\circ)^*, f =$

$v + \phi$ 则

$$\|f\| = \inf\left\{\lambda > 0: I_\psi\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \frac{\|\phi\|}{\lambda} \leq 1\right\}$$

证明: 无碍于一般性, 设 $\|f\| = 1$, 任取

$$I_\psi\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \frac{\|\phi\|}{\lambda} \leq 1 \text{ 的 } \lambda > 0 \text{ 及 } \|x\| = 1.$$

若 $\|x\|^\circ = \frac{1}{k} (1 + I_\varphi(x)), k \in k(x)$, 则有

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle x, y \rangle + \phi(x) = \\ &= \lambda \left(\frac{1}{k} \langle kx, \frac{y}{\lambda} \rangle + \frac{\phi(kx)}{k\lambda} \right) \leq \\ &= \frac{\lambda}{k} \left(I_\varphi(kx) + I_\psi\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \frac{\|\phi\|}{\lambda} \right) \leq \\ &= \frac{\lambda}{k} (I_\varphi(kx) + 1) = \lambda \end{aligned}$$

若 $\|x\|^\circ = A \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|, k(x) = \emptyset$, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - (x(1), x(2), \dots, x(n), 0, \dots)\|^\circ &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} A \sum_{i > n} x(i) = 0 \end{aligned}$$

从而 $x \in h_\varphi^\circ$, 于是对满足 $I_\psi\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \frac{\|\phi\|}{\lambda}$ 的 $\lambda > 0$ 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda \langle x, \frac{y}{\lambda} \rangle = \lambda \sum_i x(i) \frac{y(i)}{\lambda} \leq \\ &= \lambda \sum_i A x(i) = \lambda \end{aligned}$$

由 x 的任意性有 $\|f\| \leq \lambda$ 。

由 λ 的任意性得

$$\|f\| \leq \inf\left\{\lambda > 0: I_\psi\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \frac{\|\phi\|}{\lambda} \leq 1\right\}.$$

如果等号不真, 则

$$\inf\left\{\lambda > 0: I_\psi\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \frac{\|\phi\|}{\lambda} \leq 1\right\} > \|f\| = 1$$

故

$$I_\psi(y) + \|\phi\| > 1 + \delta > 1$$

由引理4有,取 $z \in l_\phi^\circ$, $I_\psi(z) \leq \frac{\delta}{2}$ 满足

$$I_\psi(y) + \phi(z) > 1 + \delta$$

又可取 i_0 和

$$v \in l_\psi: \begin{cases} |v(i)| < |y(i)| \leq A(1 \leq i \leq i_0) \\ v(i) = 0(i > i_0) \end{cases}$$

使

$$I_\psi(y) + \phi(z) > 1 + \delta > 1$$

由 Young 不等式

$$\langle v, x \rangle = \sum_{i=1}^{i_0} (|v(i)| \cdot q(|v(i)|)) - \phi(q(|v(i)|)) + \phi(z) > 1 + \delta$$

设

$$x(i) = \begin{cases} q(|v(i)|) (i \leq n) \\ z(i) (i > n) \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} 1 = \|f\| &= \|y + \phi\| \geq \|u + \phi\| \geq \\ (u + \phi) \frac{x}{\|x\|^\circ} &= \\ \frac{1}{\|x\|^\circ} [\langle x, u \rangle + \phi(x)] &= \\ \frac{1}{\|x\|^\circ} (\sum_{i=1}^{i_0} |v(i)| q(|v(i)|) + \phi(z)) &\geq \\ \frac{1}{\|x\|^\circ} (1 + \delta + \sum_{i=1}^{i_0} \phi(q(|v(i)|))) &= \\ \frac{1}{\|x\|^\circ} (1 + \delta + I_\psi(x) - \sum_{i>i_0} \phi(z(i))) &= \\ \frac{1}{\|x\|^\circ} (1 + I_\psi(x) + \delta - \frac{\delta}{2}) &\geq \\ \frac{1}{\|x\|^\circ} (\|x\|^\circ + \frac{\delta}{2}) &= 1 + \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

矛盾。

定理3 设 $f \in l_\phi^*$, $f = v + \phi$, $v \in l_\psi^\circ$, $\phi \in F$ 若 $k(v) = \emptyset$ 且 $\phi \neq 0$, 则 f 在 l_ϕ 的单位球面不可达。

证明: 若不真, 则 $\exists x = \{x(i)\}_{i=1}^\infty \in l_\phi$ 有

$$\|f\|^\circ = f(x) = \langle v, x \rangle + \phi(x) \leq \|v\|^\circ + \|\phi\| = \|f\|^\circ$$

从而有

$$\langle v, x \rangle = \|v\|^\circ, \phi(x) = \|\phi\|$$

由于 $k(v) = \emptyset$ 可推出 $N(v)$ 为有限集, 设 $v = \{v(1), v(2), \dots, v(m), 0, 0, \dots\}$,

取

$$x_m = \{x(1), x(2), \dots, x(m), 0, 0, \dots\}$$

则

$$\|v\|^\circ = \langle v, x \rangle = \langle v, x_m \rangle \leq \|v\|^\circ \|x_m\|$$

从而有

$$\|x_m\| \geq 1, I_\psi(x_m) \geq 1$$

又 $I_\psi(x_m) \leq I_\psi(x) \leq 1$, 则有

$$I_\psi(x_m) = I_\psi(x) = 1, \sum_{i=m}^\infty \phi(x(i)) = 0$$

则

$x \in h_\phi$ 与 $\phi \neq 0$ 矛盾。

定理4 若 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\phi(u)}{u} = A < \infty$, $x \in l_\phi^\circ$ 且 $k(x) = \emptyset$ 。则 $x \in S(l_\phi^\circ)$ 是光滑点的充分必要条件是

$$\sum_{i \in N(x)} \psi(A) = 1。$$

证明: 必要性, 若不真, 则有

$$\sum_{i \in N(x)} \psi(A) < 1$$

令 $i_0 \notin N(x)$, 取 $y = \text{sign} x(i)$, 由定理1知 $y \in \text{Grad} x$ 。

取 $c > 0$, 使

$$\sum_{i \in N(x)} \psi(A) + \psi(c) \leq 1$$

令

$$\bar{y}: \begin{cases} \bar{y}(i) = A(i \in N(x)) \\ \bar{y}(i) = c(i = i_0) \\ \bar{y}(i) = 0(\text{其余}) \end{cases}$$

由于

$$I_\psi(\bar{y}) \leq 1 \text{ 及 } \langle x, \bar{y} \rangle = \langle x, y \rangle = 1,$$

知 $\bar{y} \in \text{Grad} x$ 矛盾, 从而 $\sum_{i \in N(x)} \psi(A) = 1$ 。

充分性, 由定理1知 $y: y(i) = A(i \in N(x))$ 。

由于

$$\sum_{i \in N(x)} \psi(A) = 1,$$

则

$$\sum_{i \in N(x)} \psi(y(i)) = 0, \phi = 0$$

即

$$f: y = \text{sign} x(i), \phi = 0$$

唯一确定, 从而 $x \in S(l_\phi^\circ)$ 是光滑点。

推论1 若 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\phi(u)}{u} = A < \infty$, 则 l_ϕ° 光滑当且

仅当

- i) $\psi(A) \geq 1$;
- ii) $\phi \in \delta_2$;
- iii) $q(v)$ 在 $[0, \psi^{-1}(\frac{1}{2})]$ 上严格调调递增。

证明: 必要性, 假设 $\psi(A) < 1$, 取 l_ϕ° 且 $\text{card} N(x) = 1$, 由定理4可知 x 不是光滑点, 与 l_ϕ° 光滑矛盾, 从而 $\psi(A) \geq 1$ 。

则 $\forall x \in l_\phi^\circ$ 都有

$$\sum_{i \in N(x)} \psi(A) \geq 1$$

由引理 7 及 8 可推出 ii), iii) 成立。

充分性, $\forall x \in l_\varphi^\circ$ 若 $k(x) = \emptyset$, 由引理 8 可知

$$\text{card}N(x) \leq \frac{1}{\Psi(A)} \leq 1$$

即 $\text{card}N(x) = 1$,

当 $\Psi(A) = 1$ 由定理 4 可知 x 是光滑点。

当 $\Psi(A) > 1$ 由引理 8 可知 $k(x) \neq \emptyset$

再由引理 7 可知 x 是光滑点, 从而有 l_φ° 光滑。

定理 5 若 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{u} = A < \infty$, $x \in l_\varphi^\circ$ 且 $k(x) =$

$\emptyset$ 。则对于 $x \in S(l_\varphi^\circ)$, 以下说法等价

i) x 是强光滑点;

ii) x 是很光滑点;

iii) x 是光滑点且 $\psi \in \delta_2$ 。

证明: i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ x 是光滑点均为显然。假设 $\psi \in \delta_2$, 由于 x 是光滑点, 由定理 3, x 的唯一支撑泛函为 $y \in S(l_\psi)$ 。

若 $\xi_\psi(y) \neq 0$, 取 $z = 0$, 若 $\xi_\psi(y) = 0$, 取 $z \in S(l_\psi)$, $\xi_\psi(z) \neq 0$, 于是总有 $\xi_\psi(y - z) \neq 0$, 令

$y = (y(1), y(2), \dots, y(n), z(n+1), z(n+2), \dots)$, $(n = 1, 2, \dots)$

则

$$I_\psi(y_n) \leq I_\psi(y) + \sum_{i>n} \psi(z(i)) \rightarrow I_\psi(y) \leq 1$$

故

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \leq 1$$

又

$$\langle x, y_n \rangle = \sum_{i=1}^n x(i) y(i) + \sum_{i>n} x(i) z(i) \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x(i) y(i) = \|x\|^\circ = 1$$

故

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \geq 1$$

即

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = 1 \text{ 且 } \langle x, y_n \rangle \rightarrow 1$$

取 l_ψ 上奇异泛函

$$\phi, \phi(y - z) = \xi_\psi(y - z)$$

这样一来

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(y - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(y - z) = \xi_\psi(y - z) \neq 0$$

与 x 是很光滑点矛盾。

iii) $\Rightarrow$ i)

$$\|x\|^\circ = A \sum_{i=1}^{\infty} x(i), \sum_{i \in N(x)} \psi(A) = 1$$

此时 $N(x)$ 为有限集。

则由定理 4 有, x 的唯一支撑泛函为

$$f = y = \text{sign}x(i),$$

设 $\|f_n\| = 1, f_n = y_n + \phi_n, f_n(x) \rightarrow 1$

由

$$1 = A \sum_i x(i) \leftarrow f_n(x) = \sum_i x(i) y_n(i) + \phi_n(x) = \sum_{i \in N(x)} x(i) y_n(i)$$

及 $y_n(i) \leq A$ 可知

$$y_n(i) \rightarrow A(i \in N(x))$$

再由定理 2 有

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (I_\psi(y_n) + \|\phi_n\|) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i \in N(x)} \psi(y_n(i)) + \|\phi_n\| \right) = \sum_{i \in N(x)} \psi(A) + \lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n\| = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n\|$$

得到 $\|\phi_n\| \rightarrow 0$ 和 $\sum_{i \in N(x)} \psi(y_n(i)) \rightarrow 0$

由 x 是光滑点知

$$y_n(i) \rightarrow 0 = y(i), (i \notin N(x))$$

即 $y_n(i) \rightarrow y(i)$ 对一切 i 成立。

$$\text{令 } i_0 = \text{card}N(x), \forall \varepsilon > 0, \exists 0 < \delta < \frac{\varepsilon}{3}$$

有

$$\left\| \sum_{i=i_0+1}^{\infty} y(i) \right\| < \frac{\varepsilon}{3}, \left\| \sum_{i=1}^{i_0} (y(i) - y_n(i)) \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

又由 $\psi \in \delta_2, y \in S(l_\psi)$ 可知

$$I_\psi(y) = 1$$

且

$$\sum_{i=1}^{i_0} \psi(y(i)) = 1 - \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \psi(y(i)) > 1 - \delta$$

由于 $y_n(i) \rightarrow y(i)$ 对一切 i 成立, 则 $\exists n_0 \in N$, 使得当 $n > n_0$ 有

$$\sum_{i=1}^{i_0} \psi(y_n(i)) \geq 1 - \delta$$

$$1 = I_\psi(y_n) = \sum_{i=1}^{i_0} \psi(y_n(i)) + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \psi(y_n(i)) \geq$$

$$1 - \delta + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \psi(y_n(i))$$

因此

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \psi(y_n(i)) < \delta$$

又 $\psi \in \delta_2$ 从而有

$$\left\| \sum_{i=i_0+1}^{\infty} y_n(i) \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

则

$$\|y_n - y\| = \left\| \sum_{i=1}^{i_0} (y(i) - y_n(i)) \right\| +$$

$$\left\| \sum_{i=i_0+1}^{\infty} y_n(i) \right\| < \varepsilon$$

于是有

$$\|f_n - y\| \leq \|y_n - y\| + \|\phi_n\| \rightarrow 0$$

推论 2 若 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{u} = A < \infty$, 则以下说法等价

- i) l_φ 强光滑;
- ii) l_φ 很光滑;
- iii) l_φ 光滑且 $\Psi \in \delta_2$.

参 考 文 献:

- [1] 吴从炘, 王廷辅, 陈述涛, 等. Orlicz 空间几何理论 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1986.
- [2] 陈述涛. Orlicz 空间的光滑点 [J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 1989(1): 1.
CHEN Shutao. Smooth Points in Orlicz Spaces [J]. Journal of Natural Science, Harbin Normal University, 1989(1): 1.
- [3] 李小彦, 崔云安. 特殊 Orlicz 函数空间的光滑点 [J]. 哈尔滨商业大学学报(自然科学版), 2010, 26(4).
LI Xiaoyan, CUI Yunan. Smooth Points of Special Orlicz Function Spaces [J]. Journal of Harbin Commercial University, 2010, 26(4).
- [4] 崔云安. Banach 空间几何理论及应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [5] 陶良德. Orlicz 序列空间的光滑性 [J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 1988(1): 13.
TAO Liangde. Smoothness of Orlicz Sequence Spaces [J]. Journal of Natural Science, Harbin Normal University, 1988(1): 13.
- [6] 王保祥, 张云峰. Orlicz 序列空间的光滑点 [J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 1991(3): 18.
WANG Baoxiang, ZHANG Yunfeng. Smooth Points of Orlicz Sequence Spaces [J]. Journal of Natural Science, Harbin Normal University, 1991(3): 18.
- [7] SHI Z, WANG T. On the Smoothness of Orlicz Sequence Spaces Equipped with Orlicz Norm [J]. Collectanea Mathematica, 1996.
- [8] 左明霞, 刘红娇. 赋 Orlicz 范数的 Musielak Orlicz 序列空间的 $k\beta$ 点 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2019(1): 118.
ZUO Mingxia, LIU Hongjiao. $k\beta$ Points of Musielak Orlicz Sequence Spaces with Orlicz Norm [J]. Journal of Harbin University of Technology, 2019(1): 118.
- [9] 贾静, 王俊明. 赋 p -Amemiya 范数的 Musielak-Orlicz 空间的强端点 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2018, 23(5): 128.
JIA Jing, WANG Junming. Strong Endpoint of Musielak Orlicz Spaces with P -amemiya Norm [J]. Journal of Harbin University of Technology, 2018, 23(5): 128.
- [10] 左明霞, 彭丽娜. Orlicz 序列空间的 (k) 性质 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2017(6): 122.
ZUO Mingxia, PENG Lina. The (k) Property of Orlicz Sequence Spaces [J]. Journal of Harbin University of Technology, 2017(6): 122.
- [11] 崔云安, 郭晶晶. 与不动点性质相关的新常数 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2016, 21(2): 122.
CUI Yunan, GUO Jingjing. New Constants Related to Fixed Point Properties [J]. Journal of Harbin University of Technology, 2016, 21(2): 122.
- [12] 李小彦, 崔云安. 赋 p -Amemiya 范数 Orlicz 空间的对偶空间 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2011(1): 113.
LI Xiaoyan, CUI Yunan. Dual Spaces of Orlicz Spaces with P -amemiya Norm [J]. Journal of Harbin University of Technology, 2011(1): 113.
- [13] 刘艳丽, 崔云安, 李小彦. Orlicz 空间有关 Δ_2 -条件的注记 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2010(1): 95.
LIU Yanli, CUI Yunan, LI Xiaoyan. Orlicz Space Related Δ_2 Condition [J]. Journal of Harbin University of Technology, 2010(1): 95.
- [14] 左占飞, 崔云安. 一类自反 Orlicz 空间中常数的计算 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2009, 14(4).
ZUO Zhanfei, CUI Yunan. Calculation of Constants in a Reflexive Orlicz Space [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2009, 14(4).
- [15] 王稀. Orlicz 空间的广义 Garcia-Falset 系数 [J]. 哈尔滨理工大学, 2012.
- [16] 石忠锐, 翟佳羽. 赋 Luxemburg 范数的广义 Orlicz 函数空间中的 λ 点和 λ 性质(英文) [J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2012(1): 69.
SHI Zhongrui, ZHAI Jiayu. λ Point and λ Property in Generalized Orlicz Spaces with Luxemburg Norm [J]. Journal of East China Normal University (Natural Science), 2012(1): 69.
- [17] MUSIELAK J. Orlicz Spaces and Modular Spaces [J]. 1983, 1034(4): 1.
- [18] W Kurc. Strictly and Uniformly Monotone Musielak-Orlicz Spaces and Applications to Best Approximation [J]. Journal of Approximation Theory, 1992, 69(2): 173.
- [19] BINOD Chandra Tripathy, BIPUL Sarma. Some Double Sequence Spaces of Fuzzy Numbers Defined by Orlicz Functions [J]. Acta Mathematica Scientia(English Series)(1): 137.
- [20] ROMESH Kumar. Composition Operators on Orlicz Spaces [J]. Integral Equations & Operator Theory, 1997, 29(1): 17.

(编辑: 温泽宇)